ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ И СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ОБОБЩЕННЫМ СДВИГОМ

А.А.АКПЕРОВ

Бакинский Государственный Университет

В работе для интегральных операторов типа свертки, порожденных обобщенным сдвигом, ассоциированных с дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя, в частности, для сингулярных интегральных операторов, потенциалов Рисса и Бесселя, устанавливаются двухвесовые L_p - оценки. Весовые функции положительные и зависят от любой из координат пространственной переменной, а оператор обобщенного сдвига берется по произвольному набору переменных.

Пусть R_n -эвклидово пространство размерности $n(n \ge 1)$,

$$R^+_{m+k,k} = \{x = (x_1,\dots,x_m, x_{m+1},\dots x_{m+k}) : x_{m+1} > 0,\dots, x_{m+k} > 0\},$$

$$S^+_{m+k,k} = \{x \in R^+_{m+k,k} : |x| = 1\},$$

$$T^s u\,(x) = c_\nu \int_0^\pi \dots \int_0^\pi u\Big(x' - s', \sqrt{x^2_{m+1} - 2x_{m+1} s_{m+1} \cos\alpha_{m+1} + s^2_{m+1}},\dots,$$
$$\sqrt{x^2_{m+k} - 2x_{m+k} s_{m+k} \cos\alpha_{m+k} + s^2_{m+k}}\Big)\times$$
$$\times \sin^{2\nu_{m+1}-1}\alpha_{m+1}\dots\sin^{2\nu_{m+k}-1}\alpha_{m+k}\, d\alpha_{m+1}\dots d\alpha_{m+k} \qquad (1)$$

- оператор обобщенного сдвига (ООС), порожденный оператором Лапласа-Бесселя ([6]):

$$\Delta_B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=m+1}^{m+k} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right],$$

где $x = (x', x_{m+1},\dots, x_{m+k})$, $s = (s', s_{m+1},\dots, s_{m+k})$, $x', s' \in R_m$, $\nu_{m+1} > 0,\dots,\nu_{m+k} > 0$,

$$c_\nu = \prod_{j=m+1}^{m+k} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_j - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_j}{2}\right)}.$$

Положим

$$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}\left(R^+_{m+k,\,k}\right) = \left\{ \left\| u : L_{p,\nu}(R^+_{m+k,k}) \right\| = \left(\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |u(x)|^p \; d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

где $1 \le p < \infty$, $\nu > 0$, $d\,\mu(x) = \prod\limits_{i=1}^{m+k} d\,\mu(x_i)$,

$$d\,\mu(x_i) = \begin{cases} d\,x_i\,, & i = 1, 2, \dots m, \\ x_i^{2\nu_i}\, d\,x_i, & i = m+1, \dots, m+k. \end{cases}$$

По определению: $K_\nu(p,q)$ - совокупность интегральных операторов вида

$$(Au)(x) \overset{def}{=} \int\limits_{R^+_{m+k,k}} K(s) T^s u(x) d\mu(s), \tag{A}$$

где $1 < p < q < \infty$, $|K(s)| \le c_k |s|^{-(m+k+2|\nu|-\alpha)}$, $s \ne 0$, $\alpha = (m+k+2\,|\nu|)\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)$, ограниченно действующих из $L_{p,\nu}$ в $L_{q,\nu}$.

При $1 < p = q < \infty$ $K_\nu(p,q)$ определим как совокупность ограниченных в $L_{p,\nu}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ операторов вида (A), таких, что

$$|K(s)| \le c_k |s|^{-(m+k+2|\nu|)}.$$

Очевидно, что $K_\nu(p,q)$ при $p \ne q$ содержит потенциалы Рисса, а $K(p,p)$–сингулярные интегральные операторы, порожденные ООС:

$$Au(x) = v.p \int\limits_{R^+_{m+k,k}} \frac{f(\theta)}{|s|^{m+k+2|\nu|}} \left[T^s u(x)\right] d\mu(s) = \lim_{\varepsilon \to +0} A_\varepsilon u(x), \tag{2}$$

где

$$A_\varepsilon u(x) = \int\limits_{\{s \in R^+_{m+k,k} : |s| > \varepsilon\}} \frac{f(\theta)}{|s|^{m+k+2|\nu|}} \left[T^s u(x)\right] d\mu(s), \quad \theta = \frac{s}{|s|},$$

$\varepsilon > 0$, $|\nu| = \nu_{m+1} + \dots + \nu_{m+k}$.

Обозначим через $A_{p,\nu}(x_i)\left(A^*_{p,\nu}(x_i)\right)$, $i = \overline{1, m+k}$, совокупность измеримых функций, суммируемых в p-ой степени с весом $x_{m+1}^{2\nu_{m+1}} \dots x_{m+k}^{2\nu_{m+k}}$ на множестве $\{x \in R^+_{m+k,k} : |x_i| \ge \xi\}$ $\left(\{x \in R^+_{m+k,k} : |x_i| \le \xi\}\right)$ при любом $\xi > 0$.

Для каждого $i = 1, 2, \dots, m+k$ разобьем $R^+_{m+k,\,k}$ на прямую сумму пространств $R_{m+k-1,i}$ и $R_{1,i}$, где

$$R_{1,i}=\begin{cases}(-\infty,+\infty), & i\in\{1,2,\dots,m\};\\ (0,+\infty), & i\in\{m+1,\dots,m+k\},\end{cases}$$

а $R_{m+k-1,i}$ ортогональное дополнение $R_{1,i}$ в $R^{+}_{m+k,k}$. Точки пространств $R_{m+k-1,i}$ и $R_{1,i}$ обозначим, соответственно, через $\hat{y}_i$ и y_i, так что $y=\uparrow\left(\hat{y}_i, y_i\right)$. При этом будем пользоваться также обозначениями $u(y_1,\dots,y_{m+k})=u\left(\hat{y}_i, y_i\right)$.

Всюду в дальнейшем $\chi_E(t)$–характеристическая функция множества $E\subset(-\infty,+\infty)$, $a_i=2\nu_i$ *при* $i\in\{m+1,\dots,m+k\}$, $a_i=0$ *при* $i\in\{1,2,\dots,m\}$ и $b_i=2|\nu|-a_i$.

Положим

$$u_{\xi,i}(y)=\chi_{[0,\xi]}(|y_i|)|u(y)|,\ u^{*}_{\xi,i}(y)=\chi_{[\xi,\infty]}(|y_i|)|u(y)|,$$

$$\overset{\circ}{u}_{\xi,i}(y_i)=\left(\int\limits_{R_{m+k-1,i}} u^{p}_{\xi,i}\left(\hat{y}_i, y_i\right)d\mu\left(\hat{y}_i\right)\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\overset{\circ}{u}{}^{*}_{\xi,i}(y_i)=\left[\int\limits_{R_{m+k-1,i}} u^{*p}_{\xi,i}\left(\hat{y}_i, y_i\right)d\mu\left(\hat{y}_i\right)\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$I_{\beta,i}(u,\xi)(x)=\int\limits_{R^{+}_{m+k,k}}\frac{u_{\xi,i}(y)d\mu(y)}{\left(\left|\hat{x}_i-\hat{y}_i\right|+|x_i|+\xi\right)^{\beta}},$$

$$\dot{I}^{*}_{\beta,i}(u,\xi)(x)=\int\limits_{R^{+}_{m+k,k}}\frac{u^{*}_{\xi,i}(y)d\mu(y)}{\left[\left|\hat{x}_i-\hat{y}_i\right|+|y_i|+\xi\right]^{\beta}},$$

где $x\in R^{+}_{m+k,k}$, $\beta=(m+k+2|\nu|)\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)$.

Лемма 1. Пусть $u\in A_{p,\nu}(x_i)$, $1<p\le q<\infty$, $p'=p/(p-1)$. Тогда $\forall\xi>0$ справедлива оценка

$$\left\| I_{\beta,i}(u,\xi) : L_{q,\nu}\left(R^{+}_{m+k,k}\right)\right\| \le c\,\xi^{-\frac{1+a_i}{p'}} \int\limits_{\{R_{1,i}:|y_i|\le\xi\}} u^{\circ}_{\xi,i}(y_i)\,d\mu(y_i)\ .$$

Доказательство. Применяя теорему Фубини и затем неравенство Минковского, с учетом оценки

$$\left[\int\limits_{R_{m+k-1,i}}\left(\int\limits_{R_{m+k-1,i}}\frac{u_{\xi,i}\left(\hat{y}_i,y_i\right)d\mu\left(\hat{y}_i\right)}{\left(\left|\hat{x}_i-\hat{y}_i\right|+|x_i|+\xi\right)^{\beta}}\right)^{q} d\mu\left(\hat{x}_i\right)\right]^{\frac{1}{q}} \le \left(|x_i|+\xi\right)^{\frac{m+k-1+b_i}{r}-\beta}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{R_{m+k-1,i}}\left(u_{\xi,i}\left(\hat{y}_i,y_i\right)\right)^{p} d\mu\left(\hat{y}_i\right)\right]^{\frac{1}{p}},$$

получим

$$K\overset{def}{=}\left\|I_{\beta,i}(u,\xi) : L_{q,\nu}\left(R^{+}_{m+k,k}\right)\right\| =$$

$$=\left(\int\limits_{R_{1,i}} d\mu(x_i)\int\limits_{R_{m+k-1,i}} d\mu\left(\hat{x}_i\right)\left(\int\limits_{R_{1,i}} d\mu(y_i)\int\limits_{R_{m+k-1,i}}\frac{u_{\xi,i}\left(\hat{y}_i,y_i\right)d\mu\left(\hat{y}_i\right)}{\left(\left|\hat{x}_i-\hat{y}_i\right|+|x_i|+\xi\right)^{\beta}}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c\left(\int\limits_{R_{1,i}}\left(|x_i|+\xi\right)^{-(1+a_i)\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)q} d\mu(x_i)\right)^{\frac{1}{q}}\int\limits_{R_{1,i}} u^{\circ}_{\xi,i}(y_i)\,d\mu(y_i) \le$$

$$\le c\,\xi^{-\frac{1+a_i}{p'}}\int\limits_{R_{1,i}} u^{\circ}_{\xi,i}(y_i)\,d\mu(y_i)\,.$$

Здесь учтено, что $r>1$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}$, $\frac{m+k-1+b_i}{r}-\beta=-(1+a_i)\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)<0$.

Аналогично доказывается

Лемма $1'$. Пусть $u\in A^{*}_{p,\nu}(x_i)$, $1<p\le q<\infty$,

$\beta=(m+k+2|\nu|)\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)$, $p'=p/(p-1)$. Тогда $\forall\xi>0$ справедлива оценка

$$\left\| I^*_{\beta,i}(u,\xi) : L_{q,\nu}\left(R^+_{m+k,k}\right)\right\| \le c\xi^{\frac{a_i+1}{q}} \int\limits_{R_{1,i}} (|y_i|+\xi)^{\frac{m+k-1+b_i}{r}-\beta} \overset{\circ}{u}{}^*_{\xi,i}(y_i)\, d\mu(y_i).$$

Обозначим

$$L_{p,\nu}\left(\omega(|x_i|), R^+_{m+k,k}\right) \overset{def}{=} \left\{u - измерима : \|u\|^p_{L_{p,\nu}\left(\omega, R^+_{m+k,k}\right)} \overset{def}{=}\right.$$

$$\overset{def}{=} \int\limits_{R^+_{m+k,k}} \left(|u(x)\omega(|x_i|)|\right)^p d\mu(x) < +\infty\}.$$

Теорема 1 . Пусть $A \in K_\nu(p,q)$, $1 < p \le q < \infty$. . Если

а) ω и ω_1 - монотонно возрастающие функции, удовлетворяющие условию

$$c = \sup_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty \left[\xi^{-\frac{a_i+1}{p'}}\omega_1(\xi)\right]^q \frac{d\xi}{\xi}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^t \left[\xi^{-\frac{a_i+1}{p'}}\omega(\xi)\right]^{-p'} \frac{d\xi}{\xi}\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty, \qquad (3)$$

либо

б) ω и ω_1 - монотонно убывающие функции, удовлетворяющие условию

$$\sup_{t>0}\left(\int\limits_0^t \left(\omega_1(\xi)\xi^{\frac{a_i+1}{q}}\right)^q \frac{d\xi}{\xi}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_t^\infty \left(\omega(\xi)\xi^{\frac{a_i+1}{p'}}\right)^{-p'} \frac{d\xi}{\xi}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \qquad (3')$$

то оператор A ограниченно действует из $L_{p,\nu}\left(\omega(|x_i|), R^+_{m+k,k}\right)$ в $L_{q,\nu}\left(\omega_1(|x_i|), R^+_{m+k,k}\right)$.

Доказательство. Пусть $u \in L_{p,\nu}\left(\omega, R^+_{m+k,k}\right)$. Зафиксируем $\xi > 0$ и представим функцию $u(y)$ в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где $u_1(y) = \chi_{[0,\xi/2]}(|y_i|)u(y)$, $u_2(y) = u(y) - u_1(y)$ $\quad(\Rightarrow u_2(x) = \chi_{[\xi/2,\infty)}(|x_i|)u(x))$. Тогда $u_2 \in L_{p,\nu}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ и $Au_2(x)$ существует почти для всех $x \in R^+_{m+k,k}$. Теперь докажем, что $Au_1(x)$ сходится абсолютно для всех $x \in \left\{R^+_{m+k,k} : |x_i| > \xi\right\}$.

Отметим, что если $\beta > 0$, то $T^y\left(|x|^{-\beta}\right) \le c\,|x-y|^{-\beta}$, и, кроме того, если $x \in \left\{R^+_{m+k,k} : |x_i| > \xi\right\}$ и $|y_i| \le \xi/2$, то $|x_i - y_i| \ge |x_i| - |y_i| \ge c\left(|x_i| + \xi\right)$, и поэтому

$$|x-y|^{-\beta} \asymp \left(\left|\hat{x} - \hat{y}\right| + |x_i| + \xi\right)^{-\beta}.$$

Учитывая это и самосопряженность оператора T^S, получим

$$|Au_1(x)| = \int_{R^+_{m+k,k}} \left|T^y K(x)\right| |u_1(y)| d\mu(y) \le c \left\| u : L_{p,\nu}(\omega(|y_i|)), R^+_{m+k,k} \right\| \times$$

$$\times \left[\int_{R_{m+k-1,i}} \frac{d\mu\left(\hat{y}_i\right)}{\left[\left|\hat{x}_i - \hat{y}_i\right| + |x_i| + \xi\right]^{\beta p'}} \right]^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{R_{1,i}} \omega(|y_i|)^{-p'} d\mu(y_i) \right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty .$$

Оценим $\left\| Au : L_{q,\nu}(\omega(|x_i|)), R^+_{m+k,k} \right\|$.Пусть ω_1' –произвольная непрерывная возрастающая функция на $(0,+\infty)$, такая, что $\omega_1'(t) \le \omega_1(t)$, $\omega_1'(0) \le \omega_1(0+0)$ и $\exists \psi_1(\tau)$: $\omega_1'^q(t) = \left(\int_0^t \psi^q(\tau) d\tau \right) + \omega_1'^q(0)$, $t \in (0, \infty)$.

Прежде всего, отметим, что из (3) вытекает справедливость следующих двух соотношений [2,3]:

1) $\exists c > 0$, $\forall t \in (0,\infty)$, $\omega_1(t) \le c\,\omega\left(\frac{t}{2}\right)$;

2) $\exists c_1 > 0$:

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \left[\xi^{-\frac{a_i+1}{p'}} \psi_1(\xi) \right]^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t \left[\xi^{-\frac{a_i+1}{p'}} \omega(\xi) \right]^{-p'} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{p'}} \le c_1 .$$

Учитывая последние соотношения, имеем

$$\left\| Au : L_{q,\nu}\left(\omega_1'; R^+_{m+k,k}\right) \right\| \le \left[\int_{R^+_{m+k,k}} |Au|^q \int_0^{|x_i|} \psi_1^q(\tau) d\tau\, d\mu(x) \right]^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \omega_1'^q(0) \left[\int_{R^+_{m+k,k}} |Au|^q d\mu(x) \right]^{\frac{1}{q}} = l_1 + l_2 .$$

Далее учитывая равенство

$$\int_0^{|x_i|} \psi_1^q(\tau) d\tau = \int_0^\infty \chi_{[0,|x_i|]}(\tau) \psi_1^q(\tau) d\tau ,$$

получим

$$l_1 = \left(\int_0^\infty \psi_1^q(\tau) \int_{\left\{R^+_{m+k,k} : |x_i| \ge \tau\right\}} |Au(x)|^q d\mu(x) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \le l_1(1) + l_1(2),$$

где

$$l_1(1)=\left(\int_0^\infty \psi_1^q(\tau)\int_{\{R^+_{m+k,\,k}:|x_i|\ge\tau\}}\left|A\left(\chi_{[\tau/2,\infty]}(u)\right)(x)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$l_1(2)=\left(\int_0^\infty \psi_1^q(\tau)\int_{\{R^+_{m+k,k}:|x_i|\ge\tau\}}\left|A\left(\chi_{[0,\tau/2]}(u)\right)(x)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

В силу $A\in K_\nu(p,q)$ и 1) имеем

$$l_1(1)\le c_A\left[\int_{R^+_{m+k,k}}\left(\int_0^{2|x_i|}\psi_1^q(\tau)\,d\tau\right)|u(x)|^p\,d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le c_A\left(\int_{R^+_{m+k,k}}|u(x)|^p\,\omega_1(2|x_i|)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\le c_A\left(\int_{R^+_{m+k,k}}|u(x)|^p\,\omega^p(|x_i|)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оценим $l_1(2)$. Очевидно, что $\left|A\left(\chi_{[0,|x_i|]}(u)\right)(x)\right|\le c\,I_{\beta,i}\left(u,\frac{\tau}{2}\right)(x)$ при $x\in\left\{R^+_{m+k,k}:|x_i|\ge\tau\right\}$.

Отсюда учитывая лемму 1, получим

$$l_2(2)\le\left(\int_0^\infty \psi_1^q(\tau)\tau^{-\frac{a_i+1}{p'}\cdot q}\left(\int_{\{R^+_{m+k,k}:|y_i|\le\tau\}}u^0_{\tau,i}(y_i)\,d\mu(y_i)\right)^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\{R_{1,i}:|y_i|\le\tau\}}u^0_{\tau,i}(y_i)\,d\mu(y_i)=\int_0^\zeta A_{\tau,i}(t)t^{a_i}\,dt,\\[2ex] A_{\tau,i}(t)=\gamma_i\,u^0_{\tau,i}(-t)+u^0_{\tau,i}(t)\,,\qquad \gamma_i=\begin{cases}1, & если\quad i\in\{1,2,\dots,m\}\\ 0, & если\quad i\in\{m+1,\dots,m+k\}\end{cases}\end{array}\right]$$

$$\le\left(\int_0^\infty\left[\psi_1^q(\tau)\tau^{-\frac{a_i+1}{p'}}\int_0^\tau t^{a_i}A_{\tau,i}(t)\,dt\right]^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Положим $\nu(\tau)=\psi_1(\tau)\tau^{-\frac{a_i+1}{p'}}$, $\gamma(\tau)=\tau^{-\frac{a_i}{p'}}\omega(\tau)$. Тогда в силу 2) выполняется условие

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty|\nu(\tau)|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t|\gamma(\tau)|^{-p'}d\tau\right)^{\frac{1}{p'}}<+\infty;$$

поэтому в силу теоремы Харди [5]

$$\left(\int_0^\infty \left| v(t)\int_0^t g(\tau)d\tau \right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int_0^\infty |\gamma(t)g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Полагая теперь $g(\tau) = t^{a_i} A_{\tau,i}(t)$, получим

$$l_1(2) \le c\left(\int_0^\infty \left[\tau^{-\frac{a_i}{p'}}\omega(t)\tau^{a_i}A_{\tau,i}(\tau)\right]^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

И, наконец, имеем

$$l_1(2) \le c\left(\int_{R^+_{m+k,k}} |u(y)|^p \omega^p(|x_i|)\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогично, с учетом условий $A \in K_\nu(p,q)$ и $\omega_1'(0) \le \omega_1(0)$, получим

$$l_2 \le c \cdot c_A\left(\int_{R^+_{m+k,k}} |u(x)|^p \omega^p(|x_i|)\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, теорема 1 доказана в случае условия а). Случай б) рассматривается аналогично.

Пусть $1 < p \le q \le \infty$. Обозначим через $\omega^\nu_{p,q,i}$ совокупность пар (ω, ω_1) положительных функций, удовлетворяющих условиям (3) и $(3')$, где $i = \overline{1, m+k}$

Теорема 2. Пусть $A \in K_\nu(p,q)$ $1 < p \le q < \infty$, $\omega(t)$ и $\omega_1(t)$ положительные монотонные функции на $(0,\infty)$.

Если $(\omega, \omega_1) \in \omega^\nu_{p,q,i}$, $i = \overline{1, m+k}$, то для функции $u \in L_{p,\nu}\left(\omega(|x_i|), R^+_{m+k,k}\right)$ имеет место неравенство

$$\left(\int_{R^+_{m+k,k}} |(Au)(x)\,\omega_1(|x_i|)|^q\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int_{R^+_{m+k,k}} |u(x)\,\omega(|x_i|)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 3 (основная). Пусть $A \in K_\nu(p,q)$ $1 < p \le q < \infty$, $\omega(t)$ и $\omega_1(t)$ - положительные функции на $(0,\infty)$. Если

1) ω, ω_1 удовлетворяет условию

$$\sup_{t \le \tau \le 8t} \omega_1(\tau) \le c \inf_{t \le \tau \le 8t} \omega(\tau), \quad t > 0; \tag{4}$$

2) $(\omega, \omega_1) \in \omega^\nu_{p,q,i}$, то для функции $u \in L_{p,\nu}\left(\omega(|x_i|), R^+_{m+k,k}\right)$ существует $Au(x)$ для почти всех $x \in R^+_{m+k,k}$ и имеет место неравенство

$$\left(\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |\,(Au)\,(x)\,\omega_1(|x_i|)|^q\,d\,\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \le c \left(\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |\,u(x)\,\omega(|x_i|)|^p\,d\,\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

где постоянная c не зависит от u.

Доказательство. Пусть $u \in L_{p,\nu}\left(\omega\,(|x_i|), R^+_{m+k,k}\right)$. Существование $Au(x)$ для почти всех $x \in R^+_{m+k,k}$ доказывается по уже приведенной выше схеме. Положим

$$C_{i,n} = \left\{R^+_{m+k,k} : 2^n < |x_i| \le 2^{n+1}\right\}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\left(\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |\,Au\,(x)\,\omega_1(|x_i|)|^q\,d\,\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{n\in Z} \int\limits_{C_{i,n}} \left| A\left(u\,(y)\,\chi_{[0,2^{n-1}]}(|y_i|)\right)(x)\,\omega_1(|x_i|)\right|^q d\,\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{n\in Z} \int\limits_{C_{i,n}} \left| A\left(u\,(y)\,\chi_{[2^{n-1},2^{n+2}]}(|y_i|)\right)(x)\,\omega_1(|x_i|)\right|^q d\,\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{n\in Z} \int\limits_{C_{i,n}} \left| A\left(u\,(y)\,\chi_{[2^{n+2},\infty]}(|y_i|)\right)(x)\,\omega_1(|x_i|)\right|^q d\,\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} = a_1 + a_2 + a_3$$

Положим

$$u_{i,n}(y) = u\,(y)\,\chi_{[0,2^{n-1}]}(|y_i|),\; u^*_{i,n}(y_i) = \left[\int\limits_{R_{m+k-1,i}} \left| u_{i,n}\left(\hat{y}_i, y_i\right)\right|^p d\,\mu\left(\hat{y}_i\right) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Оценим сверху a_1. Пользуясь рассуждениями, проведенными при доказательстве леммы 1, получаем

$$a_1 \le \left(\sum_{n\in Z} \int\limits_{C_{i,n}} \omega_1^q(|x_i|) \left(\int\limits_{\{y\in R^+_{m+k,k}:|y_i|\le 2^{n+1}\}} \frac{u_{i,n}(y)\,d\,\mu(y)}{\left[\left|\hat{x}_i - \hat{y}_i\right| + |x_i|\right]^{\beta}} \right)^q d\,\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{n\in Z} \int\limits_{\{R_{1,i}:2^n<|x_i|<2^{n+1}\}} \omega_1^q(|x_i|) \left[\int\limits_{R_{1,i}:|y_i|\le 2^{n-1}} |x_i|^{\frac{m+k-1+b_i}{r}-\beta} u^*_{i,n}(y_i)\,d\mu(y_i) \right]^q d\,\mu(x_i) \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\leq c\left(\int\limits_{R^{+}_{m+k,k}} \left(| u(x) | \omega(|x_i|)\right)^{p} \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогичными рассуждениями доказывается, что последняя оценка имеет место и для a_3.

И наконец, оценим a_2.

Так как $C_{i,n} \subset \left\{R^{+}_{m+k,k} : 2^{n-1} < |x_i| \leq 2^{n+1}\right\} = C'_{i,n}$, то в силу $A \in K_{\nu}(p,q)$ и условия (4), имеем

$$a_2 \leq \left(\sum_{n\in Z} \left(\sup_{x\in C'_{i,n}} \omega_1 \left(|x_i|\right) \right)^{q} \int\limits_{C'_{i,n}} \left| A\left(u(y)\,\chi_{C_{i,n}}(|y_i|)\right)(x) \right|^{q} \, d\mu\,(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq c_A \cdot c \left(\sum_{n\in Z} \left(\inf_{x\in C'_{i,n}} \omega_1 \left(|x_i|\right) \right)^{q} \left(\int\limits_{C'_{i,n}} |u(x)|^{p} d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\leq c_A \cdot c \left(\int\limits_{R^{+}_{m+k,k}} | u(x)\, \omega(|x_i|) |^{p} \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев С.К. О некоторых классах интегральных операторов в пространствах суммируемых функций. ДАН СССР, 1985, т.283, № 4, с.777-780.
2. Абдуллаев С.К., Карамалиев Н.Р. Весовые оценки сингулярных и слабосингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига.I. Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2005 , № 1, с.5-16.
3. Абдуллаев С.К., Карамалиев Н.Р. Весовые оценки сингулярных и слабосингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига.II. Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2005 , № 2, с.27-39.
4. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. Весовые оценки сингулярных интегралов порожденных оператором обобщенного сдвига. Математический сборник, 1992, т.183, № 9, с.45-66.
5. Bradley J.C. Hardy inequalities with mixed. Canad.math.bull. 1978, v.21, № 2, p.405-408.
6. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. Успехи матем. наук, т.6, 1951, №2 стр.102-143.
7. Киприянов И.А., Ключанцев М.И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига.II. Сибирский матем. журнал, 1970, т.XI, № 5, с.1061-1083.

ÜMUMİLƏŞMİŞ SÜRÜŞMƏNİN DOĞURDUĞU SİNQULYAR VƏ ZƏİF SİNQULYAR İNTEQRALLAR ÜÇÜN ÇƏKİLİ QİYMƏTLƏNDİRMƏLƏR

A.Ə.ƏKBƏROV

XÜLASƏ

İşdə Laplas-Ressel diferensial operatoru ilə bağlı ümumiləşmiş sürüşmənin doğurduğu bükmə tipli inteqral operatorlar, xüsusi halda sinqulyar inteqral operatorlar, Riss və Bessel potensialları üçün L_p qiymətləndirmələri qurulur. Burada çəki funksiyaları fəza dəyişənin ixtiyari bir koordinatından asılı müsbət funksiyalardır, sürüşmə operatoru isə ixtiyari sayda də-yişənə nəzərən götürülür.

WEIGHT INEQUALITY OF THE SINGULAR AND WEAR SINGULAR INTEQRALS ASSOSIATED WITH THE GENERALIZED SHIFT OPERATORS

A.A.AKPEROV

SUMMARU

In this work the double weighted L_p inequality of the integral operators of the wrap types, generated by the generalized shift which is associated with differential operator of Laplase – Bessel, particularly for the singular integral operators with Ries and Bessel potentials.

Weighted functions are positive and depend of any of coordinate of space variable and operator of generalized shift takes on any system of variables.